Problème de BOLZA généralisé et son application au mouvement d'une machine de préparation du sol (optimisation d'un tracteur) par Bouziane KIES et Victor Florin POTERASU.

RESUME :

Le problème de Bolza est une des méthodes les plus générales d'optimisation. L'insuffisance principale de cette méthode résulte du manque de généralisation dans ses restrictions. Les problèmes d'optimisation comportent des restrictions sous forme d'inégalités. Le but de cet article consiste en une extension du problème de Bolza en tenant compte de ces restrictions inégalités et de donner un exemple relatif à l'évolution optimale d'une machine de travail de la terre (Tracteur agricole).

(I) *POSITION DU PROBLEME.*

Le problème d'optimisation consiste à chercher :

U(T), B, X(T) pour $To \leqslant T \leqslant Tn$ pour lesquelles nous obtenons un minimum de la fonction du COUT OU DE L'INDICE DE PERFORMANCE suivante :

$$(1.1) \quad J = Go\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} Fo\ (T, X(T), U(T), B)\ dT$$

soumise aux conditions :

$$(1.2) \quad \frac{dX}{dT} = F(T, X, U, B) \qquad To \leqslant T \leqslant Tn \qquad T \neq Tj$$

$$(1.3) \quad G\alpha\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT = O \qquad \alpha = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, r',$$

$$(1.4) \quad G\alpha\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT = O \qquad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots, r$$

$$(1.5) \quad P\beta\ (T, X, U, B) = O\ , \beta = 1, \ldots, q'\ ;\ To \leqslant T \leqslant Tn$$

$$(1.6) \quad P\beta\ (T, X, U, B) \leqslant O\ , \beta = q' + 1, \ldots, q\ ;\ To \leqslant T \leqslant Tn$$

Les restrictions inégalités sont d'abord transformées en restrictions égalités par la méthode de VALENTINE.

Pour accomplir cette transformation nous définissons d'abord les variables « slack » :

$V\alpha$, $\alpha = r' + 1, \ldots\ldots, r$ si $W\beta$, $\beta = q' + 1, \ldots\ldots, q$

$$(1.7)\ G\alpha\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT + V^2\alpha = O \qquad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots, r$$

$$(1.8)\ P\beta\ (T, X, U, B,) + W^2\beta\ (T) = O, \quad \beta = q' + 1, \ldots\ldots, q$$

Les restrictions (1.7) et (1.8) sont équivalentes à (1.4) et (1.6) respectivement où $V\alpha$ et $W\beta(T)$ peuvent être pris pour paramètres ou pour variables.

En remplaçant les restrictions inégalités par les restrictions égalités, notre problème d'optimisation se transforme en problème de Bolza.

La forme des restrictions (1.6) possède une grande importance dans le problème posé ; car certaines fonctions $P\beta$, par exemple, ne dépendent seulement que de T, X, (vecteur de la variable d'état) et B (vecteur paramètre). Le problème devient alors plus compliqué dans tous les intervalles où $P\beta = O$. Cette restriction sera considérée comme une restriction inégalité avec la variable d'état.

Si $P\beta$ dépend explicitement de U (le vecteur de la variable de contrôle) la restriction sera alors considérée comme une restriction inégalité avec la variable de contrôle.

(2) *RESTRICTIONS INEGALITES AVEC LA VARIABLE DE CONTROLE.*

Nous sommes obligés de conserver les conditions du théorème de Bolza. Pour cela nous devons vérifier que les conditions (1.5) et (1.8) sont indépendantes. A cet effet le vecteur de contrôle doit être considéré sous la forme $(U^T, W^T)^T$ où $W^T = [Wq' + 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, Wq]$ et la matrice suivante de rang q.

$$
(2.1) \quad \begin{bmatrix}
\frac{\delta P_1}{\delta U_1}, & \dots\dots\dots\dots, & \frac{\delta P_1}{\delta U_m}, & O, & \dots\dots\dots\dots, & O \\
\vdots & & & & & \\
\frac{\delta P_{q'}}{\delta U_1}, & \dots\dots\dots\dots, & \frac{\delta P_{q'}}{\delta U_m}, & O, & \dots\dots\dots\dots, & O \\
\frac{\delta P_{q'+1}}{\delta U_1}, & \dots\dots, & \frac{\delta P_{q'+1}}{\delta U_m}, & 2\, W_{q'+1}, & O, \dots\dots, & O \\
\vdots & & & & & \\
\frac{\delta P_q}{\delta U_1}, & \dots\dots\dots\dots, & \frac{\delta P_q}{\delta U_m}, & O, & \dots\dots\dots\dots, & 2W_q
\end{bmatrix}
$$

Pour que la matrice (2.1) puisse avoir le rang q il faut et il suffit que le nombre de colonnes : $(m + q - q')$ soit plus grand ou égal au nombre de lignes q, donc :

$$m - q' \geqslant O$$

Il est clair que si les q, premières lignes sont linéairement indépendantes, la matrice (2.1) ne pourra avoir le rang q.

Si $W_\alpha \neq O$, la ligne α doit être linéairement indépendante de toutes les autres lignes puisqu'elle a un élément non nul situé dans la colonne $m + \alpha - q'$. En conséquence, pour l'indépendance linéaire des lignes comprises entre $q' + 1$ et q, il est nécessaire de considérer seulement celle d'indice α avec $W_\alpha = O$. Il en résulte d'après (1.8) que pour la même situation nous avons $P_\alpha = O$.

Retour au menu

En effet la matrice (2.1) aura le rang q si et seulement si la matrice :

$$(2.2) \quad \left[\frac{\delta Pi}{\delta U} \right] \quad , Pi = O$$

a son rang de ligne.

On trouve ceci en constatant que les gradients de toutes les fonctions restrictions (qui sont des inégalités) par rapport aux variables de contrôle doivent être linéairement indépendantes. De sorte que le théorème de Bolza peut être appliqué.

Nous définissons

$$(2.3) \quad G = Ko\ Fo + \sum_{\alpha = 1}^{r} M\alpha\ F\alpha,$$

$$(2.4) \quad G' = \sum_{\alpha = r'+1}^{r} M\alpha\ V^2\alpha\ ,$$

$$(2.5) \quad H = K^T\ F - Ko\ Fo - \sum_{\alpha = 1}^{r} M\alpha\ L\alpha - \sum_{\beta = 1}^{q} N\beta\ P\beta,$$

$$(2.6) \quad H' = - \sum_{\alpha = r'+1}^{r} M\alpha\ V^2\alpha - \sum_{\beta = q'+1}^{q} N\beta\ W^2\beta,$$

et posons $\overline{H} = H + H'$,

et $\overline{G} = G + G'$.

Les conditions nécessaires au problème de Bolza seront :

$$(2.7) \quad \frac{dK}{dT} = - \frac{\delta H^T}{\delta X},$$

$$(2.8) \quad \frac{\delta H}{\delta U} = O,$$

$$(2.9) \quad \frac{\delta H'}{\delta W} = O,$$

$$(2.10)\quad \frac{\delta G}{\delta B} - \int_{To}^{Tn} \frac{\delta H}{\delta B}\, dT = O,$$

$$(2.11)\quad \frac{\delta G'}{\delta V} - \int_{To}^{Tn} \frac{\delta H'}{\delta V}\, dT = O.$$

La solution de Bolza doit satisfaire à la condition suivante :

(2.12) $H(T, X(T), U, B, K(T), M, O,V,W) \leqslant \overline{H}(T, X(T), U(T), B, K(T), O,V,W,)$

pour tous les U admissibles.

La condition (2.9) sous forme scalaire sera :

(2.13) $-\ 2\ N\beta\ W\beta = O \quad , \beta = q' + 1, \ldots\ldots\ldots, q$

si $W\beta = O$, alors de (1.8) il résulte $P\beta = O$

si $W\beta \neq O$ il en résulte que $P\beta < O$ et $N\beta = O$.

Alors la relation (2.13) est équivalente à :

(2.14) $N\beta\,(T)\ P\beta\,(T, X, U, B) = O\ ,\ \beta' = q' + 1, \ldots\ldots, q$

La condition (2.11) devient :

$$2\ M\alpha\ V\alpha + \int_{To}^{Tn} 2\ M\alpha\ V\alpha\ dt = O, \qquad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots, r,$$

d'où $\quad 2\ M\alpha\ V\alpha\ (1 + Tn - To) = O, \qquad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots, r,$

mais $\quad 1 + Tn - To \neq O$

Donc (2.15) $\quad M\alpha\ V\alpha = O, \quad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, r.$

Si $V\alpha = O$, de (1.7) nous déduisons que la restriction (1.4) est une égalité.

Si $V\alpha \neq O$, la restriction (1.4) est une inégalité stricte et $M\alpha = O$ et la relation (2.15) est équivalente à

$$(2.16)\quad M\alpha \left\{ G\alpha\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT \right\} = O \qquad \alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, r$$

Les conditions (2.13) et (2.15) impliquent

$$H' = O \quad \text{et} \quad G' = O$$

aussi $\bar{H} = H$ et $\bar{G} = G$

La condition nécessaire (2.12) sera :

(2.17) $H(T, X(T), U, B, K(T), M, O,) \leqslant H(T, X(T), U(T), B, K(T), M, O)$

pour tous les U admissibles.

D'après [1] , [2] , et [3] il résulte que :

$K \geqslant O$, $M\alpha \geqslant O$, $\alpha = r' + 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, r$,
et
$N\beta\ (T) \geqslant O$, $\beta = q' + 1, \ldots\ldots\ldots, q$, $To \leqslant T \leqslant Tn$

à l'aide des conditions exposées plus haut, on peut énoncer le théorème suivant.

THEOREME 1 : Si (X(T), U(T), B, Tj, Xj) est une solution du problème d'optimisation posé et si la matrice (2.2.) a son rang q. Alors :

x) Il y a des multiplicateurs :

$Ko \geqslant O$; $Ki\ (T)$ $(i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, m)$

$M\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots\ldots, r)$; $M\alpha \geqslant O$ $(\alpha = r' + 1, \ldots\ldots, r)$

$N\beta\ (T)$ $(\beta = 1, \ldots, q)$; $N\beta\ (T) \geqslant O$ $(\beta = q' + 1, \ldots, q)$

tous non nuls.

x) Les fonctions G et H des relations (2.3) et (2.5) sont telles que :

$$(2.18) \qquad \frac{dK}{dT} = - \frac{\delta H^T}{\delta X} \qquad \text{pour } T \neq Tj$$

$$(2.19) \qquad \frac{\delta H}{\delta U} = O \qquad \text{pour } T \neq Tj$$

$$(2.20) \qquad \frac{\delta G}{\delta B} - \int_{To}^{Tn} \frac{\delta H}{\delta B}\, dT = O$$

$$(2.21)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta G^T}{\delta Xo} - K(To) = O \\[2ex] \dfrac{\delta G^T}{\delta Xn} - K(Tn) = O \\[2ex] \dfrac{\delta G^T}{\delta Xj} + K(Tj - O) - K(Tj + O) = O \end{cases}$$

$$(2.22)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta G}{\delta To} + H(To + O) = O \\[2ex] \dfrac{\delta G}{\delta Tn} - H(Tn - O) = O \\[2ex] \dfrac{\delta G}{\delta Tj} - H(Tj - O) + H(Tj + O) = O \end{cases}$$

$$(2.23)\quad H(T^* - O) - H(T^* + O) = O$$

$$(2.24)\quad K(T^* - O) - K(T^* + O) = O$$

$$(2.25)\quad N\beta\ (T)\ P\beta\ (T, X, U, B) = O,\ \beta = 1, \dots\dots, q$$

$$(2.26)\quad M\alpha \left\{ G\alpha\ (B, Tj, Xj) + \int_{To}^{Tn} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT \right\} = O \qquad \alpha = 1, \dots\dots\dots, r$$

$$(2.27)\quad \frac{dH}{dT} = \frac{\delta H}{\delta T} \qquad \text{pour } T \neq Tj$$

$$(2.28)\quad H(T, X(T), U, B, K(T), M, O) \leqslant H(T, X(T), U(T), B, K(T), M.O)$$

pour tous les U admissibles.

Dans ce cas nous trouvons toujours une solution car le nombre de conditions est égal au nombre d'inconnues. L'existence d'une solution est une question très difficile qui a déjà été traitée (voir [2] et [4]).

(3) *RESTRICTIONS INEGALITES AVEC LA VARIABLE D'ETAT :*

Dans plusieurs problèmes les restrictions peuvent être fonction seulement de la variable d'état.

Ce cas existera quand $P\beta$ dans la relation (1.6) dépend seulement de T, X, B. Pour étudier ce problème nous considérons que :

$$(3.1) \quad P(T, X, B) \leqslant O \qquad To \leqslant T \leqslant Tn$$

Soit $\bar{T} \leqslant T \leqslant \overset{+}{T}$, $\bar{T} < \overset{+}{T}$ un intervalle où (3.1) est une égalité. Il est trivial de voir que $\dfrac{\delta P\beta}{\delta U} = O$

Ainsi la matrice (2.2) a une ligne nulle dans cet intervalle et elle ne sera pas de rang q. Le théorème (1) ne peut être appliqué directement. Il est donc nécessaire d'analyser cette situation.

Dans l'intervalle $\bar{T} \leqslant T \leqslant \overset{+}{T}$ $\quad P\beta = O$

$$(3.2) \quad \frac{dP\beta}{dT} = O = \frac{\delta P\beta}{\delta T} + \frac{\delta P\beta}{\delta X} \frac{dX}{dT}$$

D'après la relation (1.2) il résulte que $\dfrac{dX}{dT}$ peut être remplacé par F et la dernière relation devient :

$$(3.3) \quad O = \frac{dP\beta}{dT} = \frac{\delta P\beta\ (T, X(T), B)}{\delta T} + \frac{\delta P\beta\ (T, X(T), B)}{\delta X}$$
$$F(T, X(T), U(T), B)$$

Si le 2° membre de cette équation dépend explicitement de U(T), celle-ci prend la forme exigée par le problème posé plus haut.

Si nous avons le cas contraire, par la dérivation de (3.3) nous obtenons :

$$(3.4) \quad O = \frac{d^2P\beta}{dT^2} = \frac{\delta^2 P\beta}{\delta T^2} + 2\frac{\delta^2 P\beta}{\delta T \delta X} F + F^T \frac{\delta^2 P\beta}{\delta X^2}$$
$$F + \frac{\delta P\beta}{\delta X} \cdot \frac{dF}{dT},$$

Si le 2° membre de l'équation (3.4) dépend explicitement de U(T), elle prend la forme exigée sinon cette procédure continue jusqu'à l'obtention de l'équation suivante :

$$(3.5) \qquad \frac{d^{A\beta}\, P\beta}{dT^{A\beta}}\,(T,\ X(T),\ B) = O$$

qui dépend explicitement de U(T) au 1° membre.

L'entier $P\beta \geqslant 1$ est défini par : le 1° entier pour lequel cette condition est vraie.

La restriction (3.1) est appelée restriction inégalité d'ordre $P\beta$ par rapport à la variable d'état différentielle.

D'après la théorie des équations ordinaires (voir [5]) l'équation (3.5) pour $\overline{T} \leqslant T \leqslant T^{+}$ et les relations :

$$(3.6) \qquad P\beta\ (\overline{T},\ X(\overline{T}),\ B) = O,$$

$$(3.7) \qquad \frac{d^{i}P\beta}{dT^{i}}\,(\overline{T},\ X(\overline{T}),\ B) = O\ , \qquad i = 1, \ldots, A\beta - 1$$

Sont équivalentes à :

$$P\beta = O \qquad \text{pour } \overline{T} \leqslant T \leqslant T^{+}$$

Ceci évidement, exige que $P\beta$ ait $A\beta$ dérivées continues par morceaux et F aura $A\beta-1$ dans le même intervalle.

Le point T prend la place de Tj du problème antérieur dans ce sous-chapitre.

Nous proposerons que lorsque le 1° membre de la relation (3.5) est employé au lieu de $P\beta$ dans le calcul de la matrice (2.2), elle ait son rang entièrement. De toute façon le théorème (1) peut être appliqué.

Pour cela nous définissons :

$$(3.8) \qquad P\beta, A\beta \begin{cases} = P\beta & \text{si} \quad P\beta < O, \\[2mm] = \dfrac{d^{A\beta}\, P\beta}{dT^{A\beta}} & \text{Si} \quad P\beta = O, \end{cases}$$

où $A\beta = O$ si $P\beta$ implique U explicitement.

$$(3.9) \qquad G = KFo + \sum_{r}^{\alpha = 1} K\alpha\ G\alpha$$

Retour au menu

$$(3.10)\quad \tilde{G} = \sum_{\beta} \sum_{i=O}^{A\beta-1} \left\{ E_{i,\beta} \frac{d^i P\beta}{dT^i} (\bar{T}, X(T), \bar{B}) \right\}$$

où cette somme sur β est développée seulement suivant l'indice associé aux restrictions inégalités avec la variable d'état de la relation suivante :

$$(3.11)\quad \tilde{H} = K^T F - KoFo - \sum_{\alpha=1}^{r} M\alpha\, L\alpha - \sum_{\beta=1}^{q} N\beta\, P\beta, A\beta\ ,$$

avec $\bar{G} = G + \tilde{G}$, et $\tilde{H}$ et en remplaçant G et H dans le théorème (1) nous obtenons toutes les conditions nécessaires pour ce problème.

Ces conditions sont facilement calculées et données dans le théorème 2.

THEOREME 2 : Si (X(T), U(T), B, Tj, Xj) est une solution du problème d'optimisation avec des restrictions inégalités de la variable d'état, aurons des multiplicateurs.

$Ko \geqslant O$, $Ki\ (T)$ pour $i = 1, \ldots\ldots, n$,

$M\alpha$, $\alpha = 1, \ldots\ldots, r$, $M\alpha \geqslant O$, $\alpha = r' + 1, \ldots, r$

$U_{A\beta}\ (T)$, $\beta = 1, \ldots\ldots, q$, $N\beta\ (T) \geqslant O$, $\beta = q' + 1, \ldots\ldots, q$,

et $E_{i,\beta}$ $i = 1, \ldots\ldots, A\beta$ et

β associé à une restriction qui contient la variable d'état

et $P\beta = O$ dans l'intervalle $\bar{T} \leqslant T \leqslant T^+$ et nous avons

$$(3.12)\quad \frac{dK}{dT} = - \frac{\delta H^T}{\delta \tilde{X}} \qquad \text{pour } T \neq Tj,\ \bar{T},\ T^+$$

$$(3.13)\quad \frac{\delta \tilde{H}}{\delta U} = O \qquad \text{pour } T \neq Tj,\ \bar{T},\ T^+$$

$$(3.14)\quad \frac{\delta G}{\delta B} + \frac{\delta \tilde{G}}{\delta B} - \int_{To}^{Tn} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta B}\, dT = O,$$

$$
(3.15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\delta G^T}{\delta X_o} - K(T_o) = 0,\\
&\frac{\delta G^T}{\delta X_n} - K(T_n) = 0,\\
&\frac{\delta G^T}{\delta X_n} + K(T_j - 0) - K(T_j + 0) = 0,\\
&\frac{\delta G^T}{\delta \bar{X}} + K(\bar{T} - 0) - K(\bar{T} + 0) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
K(\overset{+}{T} - 0) - K(\overset{+}{T} + 0) = 0,
$$

$$
(3.16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\delta G}{\delta T_o} + \tilde{H}(T_o + 0) = 0,\\
&\frac{\delta G}{\delta T_n} - \tilde{H}(T_n - 0) = 0,\\
&\frac{\delta G}{\delta \tilde{T}_j} - \tilde{H}(T_j - 0) + \tilde{H}(T_j + 0) = 0,\\
&\frac{\delta G}{\delta \bar{T}} - \tilde{H}(\bar{T} - 0) + \tilde{H}(\bar{T} + 0) = 0,\\
&\tilde{H}(\bar{T} - 0) + \tilde{H}(\overset{+}{T} + 0) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$(3.17)\quad \tilde{H}(T^* - 0) - \tilde{H}(T^* + 0) = 0,$$

$$(3.18)\quad K(T^* - 0) - K(T^* + 0) = 0,$$

$$(3.19)\quad N\beta\ (T)\ P\beta\ (T, X, U, B) = 0\ ,\quad \beta = 1,\ldots\ldots, q$$

$$(3.20)\quad M\alpha \left\{ G\alpha\ (B, T_j, X_j) + \int_{T_o}^{T_n} L\alpha\ (T, X(T), U(T), B)\ dT \right\} = 0 \qquad \alpha = 1,\ldots\ldots\ldots, r$$

$$(3.21)\quad \frac{d\tilde{H}}{dT} = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta T} \qquad \text{pour } T \neq \bar{T}\ ,\ T_j$$

pour tous les U admissibles.

Retour au menu

Toutes les conclusions de ce théorème donnent lieu à des calculs difficiles. Par exemple les équations différentielles pour X et K sont soumises à des conditions aux limites en plusieurs points de sorte qu'elles impliquent un système de multiplicateurs indéterminés.

Les relations de (3.15) à (3.21) sont employées pour la détermination des points intermédiaires de l'intervalle To $\leqslant$ T $\leqslant$ Tn et des conditions aux limites associées pour X(T), et K(T).

L'utilisation de ce théorème peut être compliquée encore parceque la variable de contrôle résulte comme solution de l'équation (3.13) et satisfait la relation (3.22). Dans ce cas U sera déterminée en fonction de X, B et de tous les multiplicateurs. L'expression de U prendra généralement différentes formes dans chacun des sous intervalles de To $\leqslant$ T $\leqslant$ Tn tandis que les dimensions de ces sous intervalles ne sont pas connues avant le calcul de la solution.

(4) *TRAJET DANS LE TEMPS OPTIMUM D'UNE MACHINE DE LA TERRE.*

Une machine de travail de la terre (tracteur) est dirigée de telle façon que, partie d'un point donné elle atteigne un alignement indiqué dans le plus court temps possible.

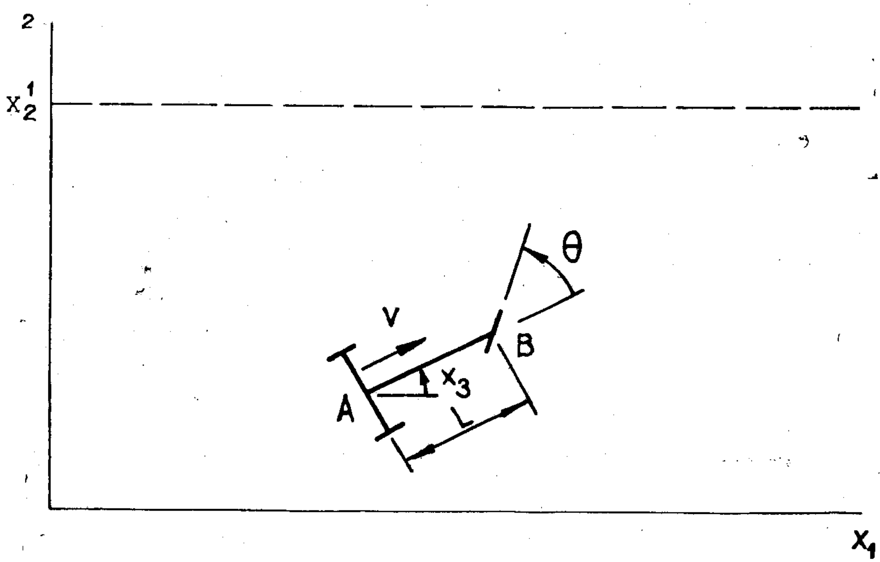

Fig. 1. — Machine de travail de la terre

Le point A, milieu de l'axe des deux roues postérieures sera déterminé par les coordonnées X_1 (T), et X_2 (T) tandis que l'orientation de la machine est spécifiée par une autre variable X_3 (T) et la direction de la machine indiquée par Θ (T).

Le trajet de la machine sera indiqué par $X(T) = (X_1(T), X_2(T), X_3(T))$, tandis qu'elle est contrôlée par le choix de l'angle θ (T).

L'axe postérieur de la machine se déplace avec la vitesse constante V.

En ce cas le déplacement de la machine sera déterminé par le système d'équations différentielles suivant :

$$(4.1)\quad \begin{cases} \dot{X}_1 = V \cos X_3 \\ \dot{X}_2 = V \sin X_3 \\ \dot{X}_3 = D \operatorname{tg} \Theta \qquad \text{où } D = \dfrac{V}{L} \end{cases}$$

pour $T = T_o$, $X_1(O) = X^o_1$, $X_2(O) = X^o_2$, $X_3(O) = X^o_3$.

Le temps final T n'est pas déterminé mais l'on demande que $X_2(T_f) = X^1_2$ et $X_3(T_f) = O$ puisque la machine doit être tangente à l'alignement au temps T. L'angle de direction est limité de sorte que :

$$-\theta_o \leqslant \theta \leqslant \theta_o ,$$

et comme une « localisation » est proposée, n'importe quel angle de cet intervalle peut être choisi instantanément.

Pour un problème raisonnable nous avons $\Theta_{\iota} < \dfrac{\pi}{2}$,

soit $|X^o_3| < \dfrac{\pi}{2}$ et $X^1_2 > X^o_2$ et toutes les autres situations peuvent être obtenues à partir d'un de ces deux cas.

Notre problème prend la forme du chapitre 1. Pour l'utilisation du théorème nous mettons :

$$G = K_o T + M_1 (X_1 ((O) - X^o_1) + M_2 (X_2 (O) - X^o_2) + + M_3 (X_3 (O) - X^o_3) + M_4 (X_2 (T_f) - X^1_2) + M_5 (X_3 (T_f)).$$

$$H = K_1 V \cos X_3 + K_2 V \sin X_3 + K_3 D \operatorname{tg} \theta - Q_1 (\theta - \theta_0) - Q_2 (\theta_0 - \theta).$$

Les conditions du théorème sont les suivantes :

$$
(4.3)\quad \begin{cases}
\dot{K}_1 = -\dfrac{\delta H}{\delta X_1} = O, \\[2ex]
\dot{K}_2 = -\dfrac{\delta H}{\delta X_2} = O, \\[2ex]
\dot{K}_3 = -\dfrac{\delta H}{\delta X_3} = K_1 \, V \sin X_3 - K_2 \, V \cos X_3
\end{cases}
$$

$$
(4.4)\quad \frac{\delta H}{\delta \Theta} = O = \frac{KD}{\cos^2 \Theta} - Q_1 + Q_2,
$$

(4.5) $K_1 \, (Tf) = O,$

(4.6) $Ko = K_1 \, (Tf) \, V \cos X_3 \, (Tf) + K_2 \, (Tf) \, V \sin X_3 \, (Tf) +$
$+ K_3 \, (Tf) \, D \, \mathrm{tg} \, \Theta \, (Tf).$

$$
(4.7)\quad \begin{cases}
N_1 \quad (\theta - \theta_0) = O, \\
N_2 \quad (\theta_0 - \theta) = O,
\end{cases}
$$

$$
(4.8)\quad \frac{dH}{dT} = \frac{\delta H}{\delta T} = O,
$$

Les 2 premières lignes de (4.3) nous donnent :

$$K_1 \; (T) = \xi_1$$

$$K_2 \; (T) = \xi_2$$

et (4.5) impliquent que

$$\xi_1 = O,$$

ainsi la dernière ligne de (4.3) devient

$$\dot{K}_3 = - \xi_2 \, V \cos X_3$$

Dans la 1° ligne de (4.1) nous remplaçons le V cos X_3 et ceci devient :

$$\dot{K}_3 = - \xi_2 \, \bar{X}_1$$

Ce qui nous donne

(4.9) $K_3 \; (T) = - \xi_2 \, X_1 \; (T) + \xi_3.$

La variation de Θ (T) peut être étudiée suivant deux cas :

1°) Cas où $|\theta \; (T)| < \theta_0$

ainsi (4.7) implique que

$$N_1 (T) = N_2 (T) = O.$$

L'équation (4.4) montre que

$$K (T) = O$$

D'après (4.9) il résulte que :

X_1 (T) est soit une constante soit nous avons :

$$\xi_1 = \xi_3 = O.$$

Ainsi la relation (4.6) entraine $K_o = O$ de sorte que tous les K_i sont nuls. Ceci est imposible d'après le théorème 1 DE MANIERE QUE X_1 (T) RESTE CONSTANTE QUAND $|\Theta (T)| < \Theta_0$:

Mais si $X_1 (T) = cte$, $\dot{X}_1 (T) = O$ et la 1° ligne de la relation (4.1) implique $X_3 (T) = O$ et de la dernière ligne du (4.1) nous obtenons $\Theta (T) = O$.

Evidement si $|\Theta (T)| < \Theta_0$ pour un certain intervalle de temps, le trajet de la machine doit être une ligne droite parallèle à l'axe X_2 (fig 1). Puisque les 2 derniers termes dans H sont nuls, ils dépendent explicitement de Θ seulement par le terme $K_3 (T) D \operatorname{tg} \Theta (T)$. L'inégalité (2.28) Θ (T) doit donner un maximum de H.

Il est clair que si $K_3 (T) \neq O$ nous obtenons :

$$\Theta (T) = \Theta_0 \operatorname{sign} (K_3 (T)), \tag{4.10}$$

où $\quad \operatorname{sign} q = \dfrac{|q|}{q}.$

L'angle $\Theta (T) = O$ n'est possible que et seulement si $K_3 (T) = O$.

Si $X^\circ_3 < \dfrac{\pi}{2}$ pour Θ petit, soit $\Theta (T) = \Theta_0$

ou $\Theta = - \Theta_0$. D'après la figure il apparait que $\Theta (T) = \Theta_0$ et que la relation (4.1) peut être intégrée et donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 (T) = X^\circ_1 + R \left[\sin (X^\circ_3 + BT) - \sin X^\circ_3 \right] \\ X_2 (T) = X^\circ_2 - R \left[\cos (X^\circ_3 + BT) - \cos X^\circ_3 \right] \\ X_3 (T) = X^\circ_3 - DT \operatorname{tg} \Theta_0 \end{array} \right. \tag{4.11}$$

où $\quad B = D \operatorname{tg} \Theta$

$$R = V/B$$

Ce trajet se fait suivant un arc circulaire dont le centre se trouve au point $(X^\circ_1 - R \sin X^\circ_3,\ X^\circ_2 + R \cos X^\circ_3)$ et dont le sens du mouvement est contraire à celui d'une montre.

Si θ devient $-\theta_0$ à un instant T^* donné ou $X_1(T^*) = X^*_1$, $X_2(T^*) = X^*_2$, $X_3(T^*) = X^*_3$,

le trajet sera décrit par :

$$(4.12)\quad \begin{cases} X_1(T) = X^*_1 - R\,[\sin(X^*_3 - BT) - \sin X^*_3], \\ X_2(T) = X^*_2 + R\,[\cos(X^*_3 - BT) - \cos X^*_3], \\ X_3(T) = X^*_3 - DT \operatorname{tg} \theta_0. \end{cases}$$

Ce trajet se fait suivant un arc circulaire dont le centre se trouve au point $(X^*_1 + R \sin X^*_3,\ X^*_2 - R \cos X^*_3)$ et le sens du mouvement est celui des aiguilles d'une montre.

Puisque cet arc circulaire doit être tangent à la ligne $X_2 = X^1_2$, la coordonnée X_2 de ce centre sera :

$$X^1_2 - R = X^*_2 - R \cos X^*_3.$$

De (4.1) il résulte que $X_3(T)$ doit être continu et que $X_1(T)$ et $X_2(T)$ le sont aussi. Par conséquent, la tangente au trajet sera déterminée au point A du plan (X_1, X_2) par :

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{\dot{X}_2}{\dot{X}_1} = \operatorname{tg} X_3,$$

et cette pente est aussi continue. Ceci signifie que les segments de trajet optimum où $\theta = -\theta_0$ ou θ ou θ_0 doivent être aussi tangents en leur point d'intersection.

En employant ce résultat, la solution de ce problème peut être donnée géométriquement. Aussi dans la figure 2, l'arc initial donné par (4.11) est indiqué partant du point (X°_1, X°_2). Dans la figure 2 sont tracés une famille d'arcs correspondants à plusieurs valeurs de X^1_2.

D'après la construction de la figure 2 il résulte que le point de tangence de ces cercles (X^*_1, X^*_2) se trouve au milieu du segment qui joint les centres.

Celui ci sera :

$$X^*_1 = \tfrac{1}{2}\,(X^\circ_1 - R \sin X^\circ_3 + X^*_1 + R \sin X^*_3),$$

$$X^*_2 = \tfrac{1}{2}\,(X^\circ_2 - R \cos X^\circ_3 + X^*_2 - R \cos X^*_3).$$

Retour au menu

Sachant que $X^1 - R = X^*_2 - R \cos X^*_3$ les deux dernières équations deviennent

$$X^*_1 = X^\circ_1 - R \sin X^\circ_3 + \left\{ R^2 - \tfrac{1}{4} (X^1_2 - R - X^\circ_2 - R \cos X_3)^2 \right.$$

$$X^*_2 = \tfrac{1}{2} (X^\circ_2 + X^1_2 + R \cos X^\circ_3 - R).$$

De la famille des courbes de la figure 2, il apparaît que $X^1_2 > S = R + X^\circ_2 + R \cos X^\circ_3$ et alors le premier arc est parcouru à l'instant $\overline{T}$ ou $X_3 (\overline{T}) = \dfrac{\pi}{2}$

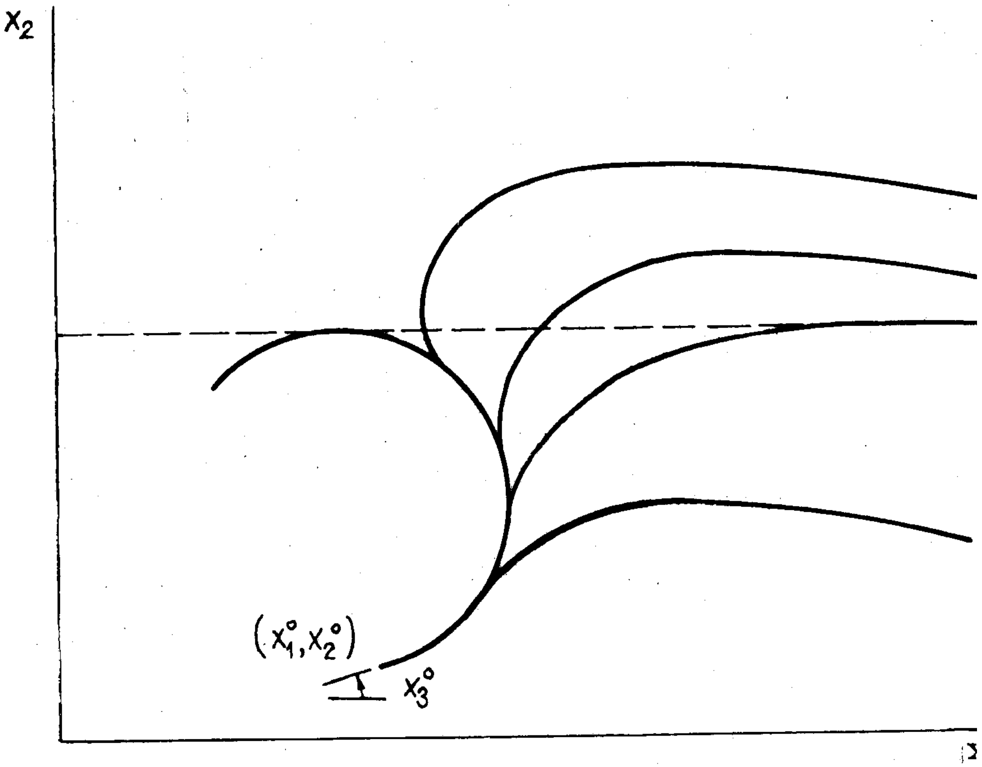

Fig. 2. — Les arcs extrêmes.

$$\text{Au point } X_1(\bar{T}) = X^\circ_1 - R \sin X^\circ_2 + R_1 X_2(\bar{T})$$
$$= X^\circ_2 + R \cos X^\circ_2$$

peut exister la possibilité de construire la partie verticale du trajet optimal. Cette construction sera faite dans la figure 3.

Les trajets extrêmes construits pour $X^1_2 > S$ satisfont à toutes les conditions du théorème 2 de telle façon qu'ils peuvent être optimaux.

Il est clair que pour $X^1_2 < S$ nous trouvons une seule solution pour notre problème.

Pour $X^1_2 > S$ il n'y a que le cas montré $X^1_2 = \hat{X}^1_2$

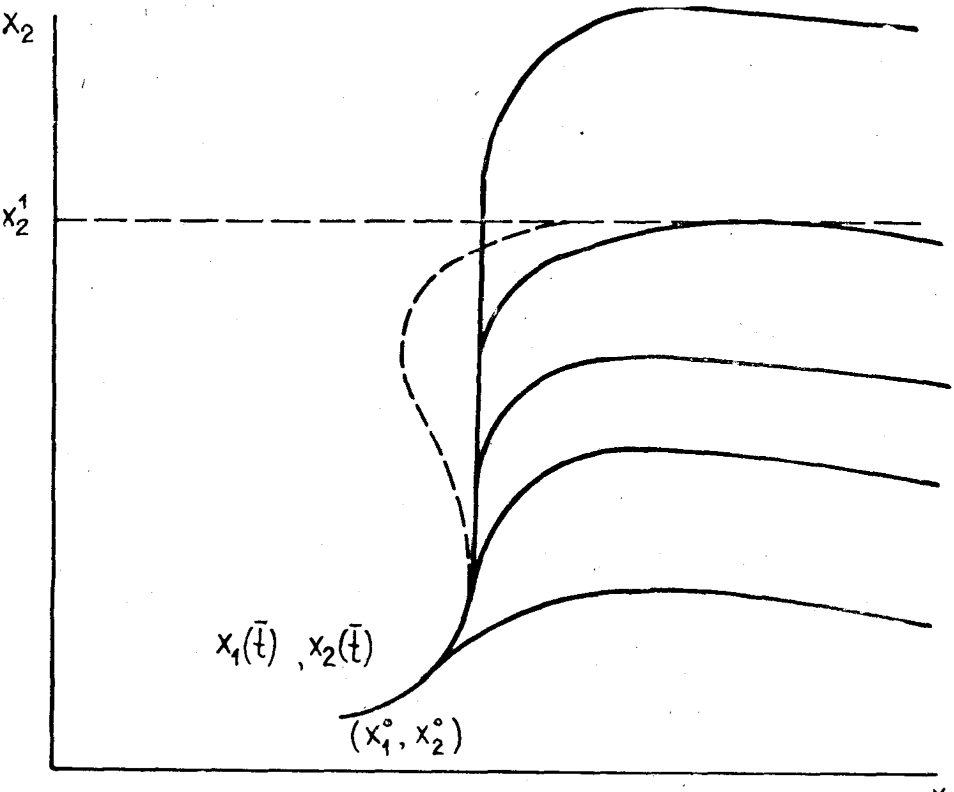

Fig. 3. Les trajets extrèmes avec la section droite.

L'ensemble des extrèmes qui tendent vers la droite $X_2 = \hat{X}^1_2$ satisfont donc aux conditions nécessaires du problème.

Entre ces deux familles, une seule met le plus court temps pour arriver à $X_2 = \hat{X}^1_2$ qui est choisie. La relation (3.22) peut donner la solution par élimination d'une famille.

Il apparait que s'il existe une famille d'extrêmes en ligne droite, elle sera la meilleure.

Si $X^1_2 > S + 2R$, il est impossible d'avoir $X_2 = X^1_2$ avec seulement deux arcs circulaires, ainsi l'extrème de section droite sera pris.

(5). *CONCLUSION.*

Le problème posé donne plusieurs idées de base sur les complexités rencontrées dans la projection optimale et sur la théorie du contrôle optimal de sorte que :

(1). des courbes extrèmes par morceaux : les conditions du théorème 1 donnent plusieurs courbes solutions ainsi que la forme du trajet optimum par morceaux dans l'espace de l'état.

(2). des solutions multiples : la résolution du problème posé a donné plusieurs solutions. La condition (2.28) nous permet de choisir la meilleure.

(3). *des arcs singuliers* quand la fonction H ne dépend pas explicitement de la variable contrôle, l'équation (2.19) ne donne aucune information. Dans ce cas l'inégalité (2.28) est employée pour la détermination de la variable de contrôle.

L'ordinateur donne en tous cas la solution exacte avec beaucoup plus de rapidité.

BIBLIOGRAPHIE

1. HESTENES M., Calculus of Variation and Optimal Control Theory, J. Wiley, New-York, 1966.

2. LEE. E. B., Markus L. Fondations of Optimal Control Theory, J. Wiley, New-York, 1967.

3. PONTRYAGIN. L. S., Boltyanskii V. G, Gamkrelidze R. V. Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processus, J. Wiley, New-York, 1962.

4. Schmaedke W. W, The Existence of Theory of Optimal Control System, in Advances in Control Systems Vol. 3, edited by C.T. Leondes, Academic Press, New-York 1966.

5. Coddington E. L., Levinson N, Theory of Ordinary Differential Equations, McGRAW — Hill, New-York, 1955.