Retour au menu

LES PLANS D'EXPERIENCE POUR DEUX ENSEMBLES NON INTERACTIFS DE TRAITEMENTS

par D. A. PREECE
University of Kent - Grande Bretagne

1. INTRODUCTION.

Dans un grand nombre d'expériences dans les vergers, les unités experimentales, ou parcelles, sont les arbres ou des groupes d'arbres. Les situations des parcelles sont souvent telles que le plan pour une expérience avec un seul ensemble de traitements doit être non orthogonal. D'ailleurs, comme les arbres fruitiers durent plusieurs années, on veut donc utiliser les mêmes arbres pour essayer plusieurs ensembles successifs de traitements. Si les effets résiduels d'un ensemble de traitements continuent jusqu'à l'assemblage des données relatives à l'ensemble suivant, l'analyse des données doit tenir compte des effets des deux ensembles de traitements. On peut d'ordinaire présumer qu'il n'y a pas d'interaction entre les effets résiduels d'un tel ensemble de traitements et les effets de l'ensemble suivant. Celui qui expérimente sur les arbres fruitiers doit donc s'intéresser aux plans non orthogonaux pour deux ensembles non interactifs de traitements. Ces plans seraient utiles aussi pour certaines expériences sur les autres plantes vivaces. Et on m'a toutefois dit que l'un de ces plans a été utilisé pour une expérience sur les chaussures.

2. DEUX EXEMPLES.

Le premier article au sujet des plans pour deux ensembles non interactifs de traitements est l'article de HOBLYN, PEARCE et FREEMAN (1954), un article écrit à East Malling Research Station. Parmi les exemples donnés par ces auteurs, le premier est très simple.

En 1951 un plan en six blocs aléatoires complets était utilisé pour tester six pulvérisations dénotées par les lettres majuscules A, B, C, D, E et F; en 1952, six produits différents dénotés par les lettres minuscules a, b, c, d, e et f étaient testés. Le plan pour les deux ensembles de traitements était orthogonal:

Retour au menu

Bloc I						Bloc II						Bloc III					
D	*F*	*C*	*A*	*B*	*E*	*B*	*F*	*E*	*A*	*D*	*C*	*A*	*F*	*D*	*E*	*B*	*C*
e	*d*	*a*	*b*	*c*	*f*	*a*	*f*	*e*	*c*	*d*	*b*	*a*	*b*	*f*	*d*	*e*	*c*

Bloc IV						Bloc V						Bloc VI					
A	*B*	*F*	*E*	*C*	*D*	*E*	*B*	*D*	*A*	*F*	*C*	*C*	*A*	*D*	*E*	*B*	*F*
e	*d*	*c*	*a*	*f*	*b*	*c*	*b*	*a*	*f*	*e*	*d*	*e*	*d*	*c*	*b*	*f*	*a*

Chacun des nouveaux produits est présent exactement une fois dans chaque bloc; chacun des nouveaux produits se retrouve exactement une fois avec chacun des anciens traitements. Par conséquent, l'analyse de variance pour 1952 ressemble à celle d'un carré latin:

S.V.	d.l.
Blocs	5
Effets résiduels des anciens traitements	5
Effets des nouveaux traitements	5
Erreur	20
Total	35

Le deuxième exemple de HOBLYN, PEARCE et FREEMAN est un peu plus compliqué. C'est une expérience sur douze lignées de pommiers, dénotées par les lettres majuscules A, B, ..., L, et disposées en deux blocs complets; on a utilisé les vingt-quatre parcelles pour tester quatre pulvérisations dénotées par les lettres minuscules a, b, c et d, Le plan était le suivant:

Blocs	Lignées											
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
I	*a*	*d*	*b*	*c*	*d*	*d*	*b*	*b*	*c*	*a*	*c*	*a*
II	*c*	*a*	*d*	*d*	*b*	*a*	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*b*

Retour au menu

On voit que chacune des quatre pulvérisations se trouve trois fois dans chaque bloc; les pulvérisations et les blocs sont orthogonaux. Les pulvérisations et les lignées ne sont pas orthogonales, mais les pulvérisations sont *équilibrées* à l'égard des lignées, parce que chaque paire de pulvérisations apparait exactement deux fois dans la même colonne de la table. Si nous ne tenons aucun compte des deux blocs de douze parcelles, nous avons un plan en blocs incomplets équilibrés, dont les « blocs » sont les lignées et dont les « traitements » sont les pulvérisations; pour ce plan en blocs incomplets équilibrés nous avons (dans une notation bien connue)

$$t = 4 \quad r = 6 \quad b = 12 \quad k = 2 \quad \lambda = 2$$

et, par conséquent, l'efficacité du plan entier à l'égard des pulvérisations est

$$E = \frac{\lambda t}{rk} = \frac{2.4}{6.2} = \frac{2}{3}.$$

Les articles de HOBLYN, PEARCE et FREEMAN (1954) et de PEARCE (1963) nous donnent une notation pour le plan entier. La notation est

$$\mathrm{O{:}OT}$$

où le premier « O » signifie que les lignées sont Orthogonales à l'égard des blocs, le deuxième « O » signifie que les pulvérisations sont Orthogonales à l'égard des blocs, et la lettre « T » signifie que les pulvérisations sont Totalement équilibrés à l'égard des lignées. Semblablement, le plan précédent (le plan dont l'analyse ressemble à celle d'un carré latin) est du type O:OO.

3. DES PLANS MOINS SIMPLES.

Les deux exemples que je viens de citer sont assez simples qu'ils ne posent aucune difficulté. Mais le plus souvent, on est obligé d'avoir un plan moins simple. Quelquefois le caractère des matières expèrimentales nous oblige de choisir un plan en blocs où il y a moins de parcelles par bloc que de traitements dans chaque ensemble. Dans un tel cas, il se peut bien que le plan soit du type T:TT, c'est-à-dire un plan dans lequel chaque ensemble de traitements est Totalement équilibré à l'égard des blocs, et dans lequel le deuxième ensemble est Totalement équilibré à l'égard du premier.

De plus, l'expérimentateur sur les arbres fruitiers doit souvent choisir un plan non pas en blocs mais en lignes et colonnes. Parmi les plans en lignes et colonnes, les plans les plus simples pour deux ensembles non interactifs de trai-

Retour au menu

tements sont les carrés gréco-latins, qui naturellement sont du type O:OO:OOO. Mais les vergers qui se subdivisent en une disposition carrée de parcelles sont assez rares. Par conséquent, l'expérimentateur doit se servir des plans non orthogonaux y compris, par exemple, les plans du type O:OT:OTT. (Dans cette notation, le premier « O » signifie que les colonnes sont Orthogonales à l'égard des lignes; puis le groupe de lettres « OT » signifie que le premier ensemble de traitements est Orthogonal à l'égard des lignes et Totalement équilibré à l'égard des colonnes; et ainsi de suite.)

4. CHANGEMENTS SUCCESSIFS DE TRAITEMENTS.

Hoblyn, Pearce et Freeman (1954) décrivent des méthodes de changer successivement les traitements appliqués sur les arbres d'un verger expérimental.

Supposons que le plan de la première expérience dans le verger soit en blocs incomplets équilibrés — un plan du type T (Totalement équilibrés). Supposons davantage que nous voulions changer les traitements après la première année. Si les traitements du nouvel ensemble n'auront pas d'interaction avec les effets résiduels des traitements originaux il peut être possible de trouver plusieurs plans qui incorporent le plan du type T. Dans certains cas, le nouveau plan peut être du type T:OO (les nouveaux traitements orthogonaux à l'égard des blocs et à l'égard des traitements du premier ensemble). Dans certains autres cas, le nouveau plan peut être du type T:TT. Un diagramme nous aidera à voir ce qui se passe:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Plan original} & & \mathrm{T} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{2-ème année} & \mathrm{T{:}OO} & & \mathrm{T{:}TT}
\end{tikzcd}
$$

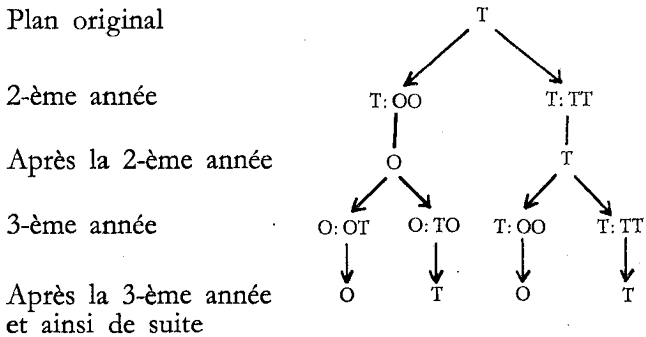
Quand les effets résiduels du premier ensemble de traitements auront disparu, le plan deviendra de nouveau un plan pour un seul ensemble:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Plan original} & & \mathrm{T} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{2-ème année} & \mathrm{T{:}OO} \arrow[d] & & \mathrm{T{:}TT} \arrow[d] \\
\text{Après la 2-ème année} & \mathrm{O} & & \mathrm{T}
\end{tikzcd}
$$

On peut continuer l'évolution de la série d'expériences; au bout de chaque

Retour au menu

phase on peut faire des choix pareils:



Bien entendu, on peut avoir un plan dans lequel un des ensembles de traitements est *partiellement* équilibré à l'égard des blocs ou d'un autre ensemble; ou bien un plan qui contient un ensemble de traitements qui n'est ni orthogonal, ni totalement équilibré, ni partiellement équilibré, à l'égard d'un autre facteur. Mais dans l'exposé bref que je vous offre aujourd'hui, je dois consacrer mon attention aux plans les plus simples. Je voudrais ainsi vous donner les détails de quelques plans en blocs, des types T:TT et T:TO, et de quelques plans en lignes et colonnes, des types O:OT:OTT et O:OT:TOO.

5. DES EXEMPLES.

Il sera bon de prendre comme notre premier exemple un plan en lignes et colonnes, un plan où il y a autant de traitements dans chaque ensemble qu'il y a de colonnes, et où chaque ensemble est orthogonal à l'égard des lignes:

Plan (*a*)

AA	*BB*	*CC*	*DD*	*EE*	*FF*	*GG*
DG	*EA*	*FB*	*GC*	*AD*	*BE*	*CF*
FD	*GE*	*AF*	*BG*	*CA*	*DB*	*EC*
GF	*AG*	*BA*	*CB*	*DC*	*ED*	*FE*

Dans cet exemple il y a 4 lignes, 7 colonnes, et 7 traitements dans chaque ensemble. La disposition de chaque ensemble est un « carré de Youden » (en anglais: « Youden 'square' »), c'est-à-dire un plan rectangulaire (non pas carré) où chaque traitement se trouve exactement une fois par ligne et où les colonnes sont les blocs d'un plan en blocs incomplets équilibrés. Également chaque ensemble est totalement équilibré à l'égard de l'autre. Le plan est ainsi du type O:OT:OTT.

Retour au menu

Considérons l'analyse d'une variable obtenue dans une expérience dont le plan est le plan (*a*). Soient $t_{11}, t_{12}, t_{13}, \ldots$ les paramètres pour les traitements du premier ensemble $(\sum_i t_{1i} = 0)$, et $t_{21}, t_{22}, t_{23}, \ldots$ les paramètres correspondants pour le 2-ème ensemble $(\sum_j t_{2j} = 0)$. Soient $\hat{t}_{11}, \hat{t}_{12}, \ldots; \hat{t}_{21}, \hat{t}_{22}, \ldots$ les estimations des paramètres. Puis

$$\operatorname{var}(\hat{t}_{1p} - \hat{t}_{1q}) = \operatorname{var}(\hat{t}_{2p} - \hat{t}_{2q}) = \tfrac{2}{3}\sigma^2 \qquad p \neq q$$

où σ^2 est la variance par parcelle. Mais, si on omet du modèle linéaire les paramètres pour les colonnes et pour le premier ensemble de traitements, on obtient le résultat

$$\operatorname{var}(\hat{t}_{2p} - \hat{t}_{2q}) = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \qquad p \neq q$$

et si on omet les paramètres pour les colonnes et pour le 2-ème ensemble, on obtient

$$\operatorname{var}(\hat{t}_{1p} - \hat{t}_{1q}) = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \qquad p \neq q$$

Par conséquent, il y a un seul facteur d'efficacité pour n'importe quel ensemble de traitements, à savoir

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 / \tfrac{2}{3}\sigma^2 = \tfrac{3}{4}\,.$$

Bien entendu, la valeur de ce facteur d'efficacité ne peut pas être plus grande que la valeur du facteur d'efficacité de chacun des carrés de Youden, à savoir $E = 7/8$.

Une des propriétés les plus importantes du plan (*a*) est que la variance

$$\operatorname{var}(\hat{t}_{1p} - \hat{t}_{1q}) = \operatorname{var}(\hat{t}_{2p} - \hat{t}_{2q}) = \tfrac{2}{3}\sigma^2 \qquad p \neq q$$

est independante des valeurs de p et de q. Nous disons ainsi que le plan est totalement équilibré en entier, en ce qui concerne chaque ensemble de traitements. C'est un plan du type O:OT:OTT(T); la lettre « T » entre parenthèses denote l'équilibre total du plan entier.

Un autre plan du type O:OT:OTT(T) est le suivant:

Plan (*b*)

AA	*BB*	*CC*	*DD*	*EE*	*FF*	*GG*
DC	*ED*	*FE*	*GF*	*AG*	*BA*	*CB*
FB	*GC*	*AD*	*BE*	*CF*	*DG*	*EA*
GE	*AF*	*BG*	*CA*	*DB*	*EC*	*FD*

Dans ce plan, comme dans le plan (*a*), il y a 4 lignes, 7 colonnes, et 7 traitements dans chaque ensemble. Ce qui est ainsi assez surprenant, c'est que le facteur d'efficacité du plan (*b*), à savoir $\mathcal{E} = 5/8$, est différent du facteur d'efficacité du plan (*a*). Mais au cours d'une étude des plans pour deux ensembles de traitements, on trouve souvent des résultats semblables. De tels résultats sont implicites dans un article de DALL'AGLIO (1963), mais je crois que les premières affirmations explicites à ce sujet se trouvent dans mes articles de 1966.

Ce que je viens de dire peut être illustré également par les plans (*c*) et (*d*), qui sont du type T:TT(T). Ce sont des plans en blocs; chacun des plans a quatorze blocs à quatre parcelles:

Plan (*c*)

AH	*BH*	*CH*	*DH*	*EH*	*FH*	*GH*	*HA*	*HB*	*HC*	*HD*	*HE*	*HF*	*HG*
BG	*CA*	*DB*	*EC*	*FD*	*GE*	*AF*	*GB*	*AC*	*BD*	*CE*	*DF*	*EG*	*FA*
CF	*DG*	*EA*	*FB*	*GC*	*AD*	*BE*	*FC*	*GD*	*AE*	*BF*	*CG*	*DA*	*EB*
ED	*FE*	*GF*	*AG*	*BA*	*CB*	*DC*	*DE*	*EF*	*FG*	*GA*	*AB*	*BC*	*CD*

Plan (*d*)

AE	*BF*	*CG*	*DA*	*EB*	*FC*	*GD*	*DF*	*EG*	*FA*	*GB*	*AC*	*BD*	*CE*
EA	*FB*	*GC*	*AD*	*BE*	*CF*	*DG*	*FD*	*GE*	*AF*	*BG*	*CA*	*DB*	*EC*
BC	*CD*	*DE*	*EF*	*FG*	*GA*	*AB*	*GH*	*AH*	*BH*	*CH*	*DH*	*EH*	*FH*
CB	*DC*	*ED*	*FE*	*GF*	*AG*	*BA*	*HG*	*HA*	*HB*	*HC*	*HD*	*HE*	*HF*

Dans chacun de ces plans, les traitements de chaque ensemble sont disposés dans un plan en blocs incomplets équilibrés dont le facteur d'efficacité est $E = 6/7$. Les facteurs d'efficacité des plans (*c*) et (*d*) sont (*c*) $\mathcal{E} = 6/7$ et (*d*) $\mathcal{E} = 16/21$.

Avant de changer de sujet, je dois vous dire qu'il y a des plans du type T:TT qui ne sont pas équilibrés en entier. Un exemple a été fourni par HOBLYN, PEARCE et FREEMAN (1954). C'est un plan à 7 blocs, à 4 parcelles chacun; dans chaque ensemble de traitements il y a 7 traitements, chacun répété 4 fois. Mais si nous ne tenons aucun compte des lignes des plans (*a*) et (*b*), nous obtenons deux autres plans qui remplissent ces conditions numériques. Les facteurs d'efficacité des trois plans du type T:TT sont les suivants:

Plan	Type	$\mathcal{E}$
Plan (*a*) sans les lignes	T:TT(T)	$\frac{3}{4} = 0{,}750$
Plan (*b*) sans les lignes	T:TT(T)	$\frac{5}{8} = 0{,}675$
Plan de Hoblyn, Pearce et Freeman	T:TT(X)	$\frac{7}{10} = 0{,}700$ ou $\frac{7}{9} = 0{,}778$

Retour au menu

Pour le troisième de ces plans, $X \neq T$, et l'efficacité dépend de la paire de traitements en question.

Parmi les plans non orthogonaux où les deux ensembles de traitements sont orthogonaux, il y a deux types particulièrement simples. D'abord il y a les plans en lignes et colonnes, lesquels qui sont du type O:OT:TOO, par exemple

Plan (*e*)

$A\alpha$	$B\delta$	$E\gamma$	$F\gamma$	$G\alpha$	$C\beta$	$D\delta$
$B\beta$	$D\gamma$	$C\delta$	$A\delta$	$E\beta$	$F\alpha$	$G\gamma$
$C\gamma$	$F\beta$	$D\alpha$	$E\alpha$	$B\gamma$	$G\delta$	$A\beta$
$E\delta$	$C\alpha$	$G\beta$	$D\beta$	$F\delta$	$A\gamma$	$B\alpha$

Dans un tel plan, tous les facteurs sont orthogonaux sauf que les lettres majuscules et les colonnes ne sont pas orthogonales et sauf que les lettres grecques et les lignes ne sont pas orthogonales. Ces deux exceptions, ces deux « non-orthogonalities », sont independantes. Par conséquent, l'efficacité pour chaque ensemble de traitements est la même qu'elle le serait si l'autre ensemble n'etait pas là ; par conséquent, le plan est totalement équilibré en entier, en ce qui concerne n'importe quel ensemble de traitements. Pour le plan (*e*) le facteur d'efficacité du premier ensemble est $\mathcal{E} = E = 7/8$, et le facteur d'efficacité du deuxième ensemble est $\mathcal{E} = E = 48/49$.

Les autres plans simples où les deux ensembles de traitements sont orthogonaux sont des plans en blocs, lesquels sont du type T:TO(T). Un exemple qui a douze blocs de trois parcelles chacun est le suivant

Plan (*f*)

Ab	*Db*	*Gd*	*Ad*	*Ba*	*Ca*	*Aa*	*Dd*	*Ga*	*Ac*	*Dc*	*Gb*
Bc	*Ed*	*Hc*	*Da*	*Ec*	*Fd*	*Eb*	*Ha*	*Bd*	*Hb*	*Bb*	*Ea*
Cd	*Fc*	*Ib*	*Gc*	*Hd*	*Ic*	*Id*	*Cb*	*Fb*	*Fa*	*Ia*	*Cc*

Pour ce plan, le facteur d'efficacité du premier ensemble de traitements est $\mathcal{E} = E = 3/4$, et le facteur d'efficacité du deuxième ensemble est $\mathcal{E} = E = 8/9$. Mais il est important de noter que pas tous les plans du type T:TO sont du type T:TO(T).

6. CONCLUSION.

En guise de conclusion, je dois ajouter deux choses. Premièrement, les recherches sur la construction des plans des types que je viens de discuter sont

Retour au menu

inachevées. Deuxièmement, il nous reste des problèmes non résolus relatifs aux méthodes de randomiser ces plans. Notamment nous manquons de résultats relatifs aux méthodes de faire la randomisation lorsqu'on ajoute un deuxième ensemble de traitements à une expérience déjà présente.

BIBLIOGRAPHIE

AGRAWAL H., *A method of construction of three-factor balanced designs*, J. Indian Statist. Assoc., **4**, 10-13 (1966*a*).

AGRAWAL H., *Some methods of construction of designs for two-way elimination of heterogeneity*, I. J. Amer, Statist. Assoc., **61**, 1153-1171 (1966*b*).

AGRAWAL H., *Some systematic methods of construction of designs for two-way elimination of heterogeneity*, Calcutta Statist. Assoc. Bull., **15**, 93-108 (1966*c*).

BOSE R. C. - SRIVASTAVA J. N., *Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions*, Sankhya A, **26**, 145-168.

BRADU, D., *Main effect analysis of the general nonorthogonal layout with any number of factors*, Ann. Math. Statist, **36**, 88-97 (1965).

CAUSEY B. D., *Some examples of multi-dimensional incomplete block designs*, Ann. Math. Statist., **39**, 1577-1590 (1968).

CLARKE G. M., *A second set of treatments in a Youden square design*, Biometrics, **19**, 98-104 (1963).

CLARKE G. M., *Four-way balanced designs based on Youden squares with 5, 6 or 7 treatments*, Biometrices, **23**, 803-812 (1967).

DALL'AGLIO G., *Blocs incomplets équilibrés orthogonaux*, Coll. Internat, C.N.R.S., **110**, 195-214 (1963).

FEDERER W. T., *Construction of classes of experimental designs using transversals in Latin squares and Hedayat's sum composition method*, Statistical Papers in Honor of George W. Snedecor, edit. T. A. Bancroft, 91-114, Ames: Iowa State Univ. Press., 1972.

FINNEY D. J., *Soma orthogonal properties of the* 4×4 *and* 6×6 *Latin squares*, Ann. Eugen., **12**, 213-219 (1945).

FINNEY D. J., *Orthogonal partitions of the* 5×5 *Latin squares*, Ann. Eugen., **13**, 1-3 (1946*a*).

FINNEY D. J., *Orthogonal partitions of the* 6×6 *Latin squares.*, Ann. Eugen., **13**, 184-196 (1946*b*).

FREEMAN G. H., *Some experimental designs of use in changing from one set of treatments to another*, Part. I. J. R. Statist. Soc. B, **19**, 154-162 (1957*a*).

FREEMAN G. H., *Some experimental designs for use in changing from one set of treatments to another*, Part. II: *Existence of the designs*, J. R. Statist. Soc. B, **19**, 163-165 (1957*b*).

FREEMAN G. H., *Families of designs for two successive experiments*, Ann. Math. Statist., **29**, 1063-1078 (1958).

FREEMAN G. H., *The use of the same experimental material for more than one set of treatments*, Appl. Statist, **8**, 13-20 (1959).

FREEMAN G. H., *Some further designs of type O:PP*, Ann. Math. Statist., **32**, 1186-1190 (1961).

FREEMAN G. H., *The addition of further treatments to Latin square designs*, Biometrics, **20**, 713-729 (1964).

FREEMAN G. H., *Some non-orthogonal partitions of* 4×4, 5×5 *and* 6×6 *Latin squares*, Ann. Math. Statist., **37**, 666-681 (1966).

Retour au menu

FREEMAN G. H., *Experimental designs with many classifications*, J. R. Statist. Soc. B, **34**, 84-99 (1972).

HALL W. R. - WILLIAMS E. R., *Cyclic superimposed designs*, Biometrika, **60**, 47-53 (1973).

HEDAYAT A. - PARKER E. T. - FEDERER W. T., *The existence and construction of two families of designs for two successive experiments*, Biometrika, **57**, 351-355 (1970).

HEDAYAT A. - SEIDEN E., *F-square and orthogonal F-squares design; a generalisation of Latin square and orthogonal Latin squares design*, Ann. Math. Statist., **41**, 2035-2044 (1970).

HEDAYAT A. - SEIDEN E. - FEDERER W. T., *Some families of designs for multi-stage experiments: mutually balanced Youden designs when the number of treatments is prime power or twin primes. I*: Ann. Math., Statist., **43**, 1517-1527 (1972).

HEDAYAT A. - SHRIKHANDE S. S., *Experimental designs and combinatorial systems associated with Latin squares and sets of mutually orthogonal Latin squares*, Sankhya A, **33**, 423-432 (1971).

HOBLYN T. N. - PEARCE S. C. - FREEMAN G. H., *Some considerations in the design of successive experiments in fruit plantations*, Biometrics, **10**, 503-515 (1954).

PEARCE S. C., *The use and classification of non-orthogonal designs*, J. R. Statist. Soc. A, **126**, 353-377 (1963).

PEARCE S. C. - TAYLOR J., *The changing of treatments in a long-term trial*, J. Agric. Sci, **38**, 402-410 (1948).

POTTHOFF R. F., *Three-factor additive designs more general than the Latin square*, Technometrics, **4**, 187-208 (1962*a*).

POTTHOFF R. F., *Four-factor additive designs more general than Graeco-Latin square*, Technometrics, **4**, 361-366 (1962*b*).

POTTHOFF R. F., *Some illustrations of four-dimensional incomplete block constructions*, Calcutta Statist. Assoc. Bull., **12**, 19-30 (1963).

PREECE D. A., *Some row and column designs for two sets of treatments*, Biometrics, **22**, 1-25 (1966*a*).

PREECE D. A., *Some balanced incomplete block designs for two sets of treatments*, Biometrika, 53, 497-506 (1966*b*).

PREECE D. A., *Some new balanced row-and-column designs for two non-interacting sets of treatments*, Biometrics, **27**, 426-430 (1971).

REES D. H., *The analysis of variance of designs with many non-orthogonal classifications*, J. R. Statist. Soc., B, **28**, 110-117 (1966).

SRIVASTAVA J. N. - ANDERSON D. A., *Some basic properties of multidimensional partially balanced designs*, Ann. Math. Statist., **41**, 1438-1445 (1970).

SRIVASTAVA J. N. - ANDERSON D. A., *Factorial association schemes with applications to the construction of multidimensional partially balanced designs*, Ann. Math. Statist., **42**, 1167-1181 (1971).